

۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف رابطه اگر مختص اول دوتایی‌ها برابر بودند الزاماً مختص دوم آن‌ها نیز برابر باشند، پس خواهیم داشت:

هیچ مقدار m نشدنی است $m = 3 = m - 2$

۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اولاً هر ضابطه باید در محدوده‌ی خود یک به یک باشد و ثانیاً برد ضابطه‌ی اول و دوم نباید اشتراک داشته باشند مگر به ازای ورودی‌های مشترک:

$$f_1(x) = 2x^3 + k + 1$$

$$x < 1 \Rightarrow x^3 < 1 \Rightarrow 2x^3 < 2 \Rightarrow 2x^3 + k + 1 < 3 + k \Rightarrow R_{f_1} = (-\infty, 3 + k)$$

$$f_2(x) = 2\sqrt{x-1} + 1$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x-1} + 1 \geq 1 \Rightarrow R_{f_2} = [1, +\infty)$$

بنابراین برای آن که داشته باشیم $R_{f_1} \cap R_{f_2} = \emptyset$ بیش‌ترین مقدار برای $3+k$ برابر ۱ می‌باشد، بنابراین بیش‌ترین مقدار k برابر ۲- می‌باشد.

۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه $A \times B$ دارای $4 \times 3 = 12$ عضو است، مؤلفه‌ی اول مجموعه ۴ عضوی A است. الزاماً $12 - 4 = 8$ عضو حذف شود تا رابطه تبدیل به تابع گردد.

۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به دامنه تابع $-2 < x < 2 \Rightarrow 4 - x^2 > 0$ مقدار تابع $y = x - \sqrt{4 - x^2}$

$$(y - x)^2 = \left(-\sqrt{4 - x^2}\right)^2 \Rightarrow 2x^2 - 2yx + y^2 - 4 = 0.$$

همواره از ۲ کم‌تر است.

$$\Delta' > 0 \Rightarrow y^2 - 2(y^2 - 4) \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 4 \Rightarrow |y| \leq 2\sqrt{2}$$

پس $2\sqrt{2} \leq y \leq -2\sqrt{2}$ با توجه به مقدار تابع $-2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}$ یا برد تابع به صورت بازه $[-2\sqrt{2}, 2]$ می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \neq \frac{K\pi}{2} \\ 0 & x = \frac{K\pi}{2} \end{cases} = [\cos x] + [-\cos x]$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر تابعی صعودی اکید باشد نمودار معکوس خود را فقط روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قطع می‌کند. کافی است f را با نیمساز قطع دهیم تا تعداد نقاط تلاقی f و f^{-1} معلوم شود.

$$x + \sin \frac{\pi}{4} x = 2 \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} x = k\pi \Rightarrow x = 4k \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$$

در بازه داده شده ۳ نقطه‌ی تلاقی دارد. $\Rightarrow K = 0, 1, 2 \Rightarrow x = 0, 4, 8$

۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{1-x^2}{2x}$$

$$x \rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} \rightarrow f\left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f(\sin x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{Cotg} x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \end{array} \right.$$

۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

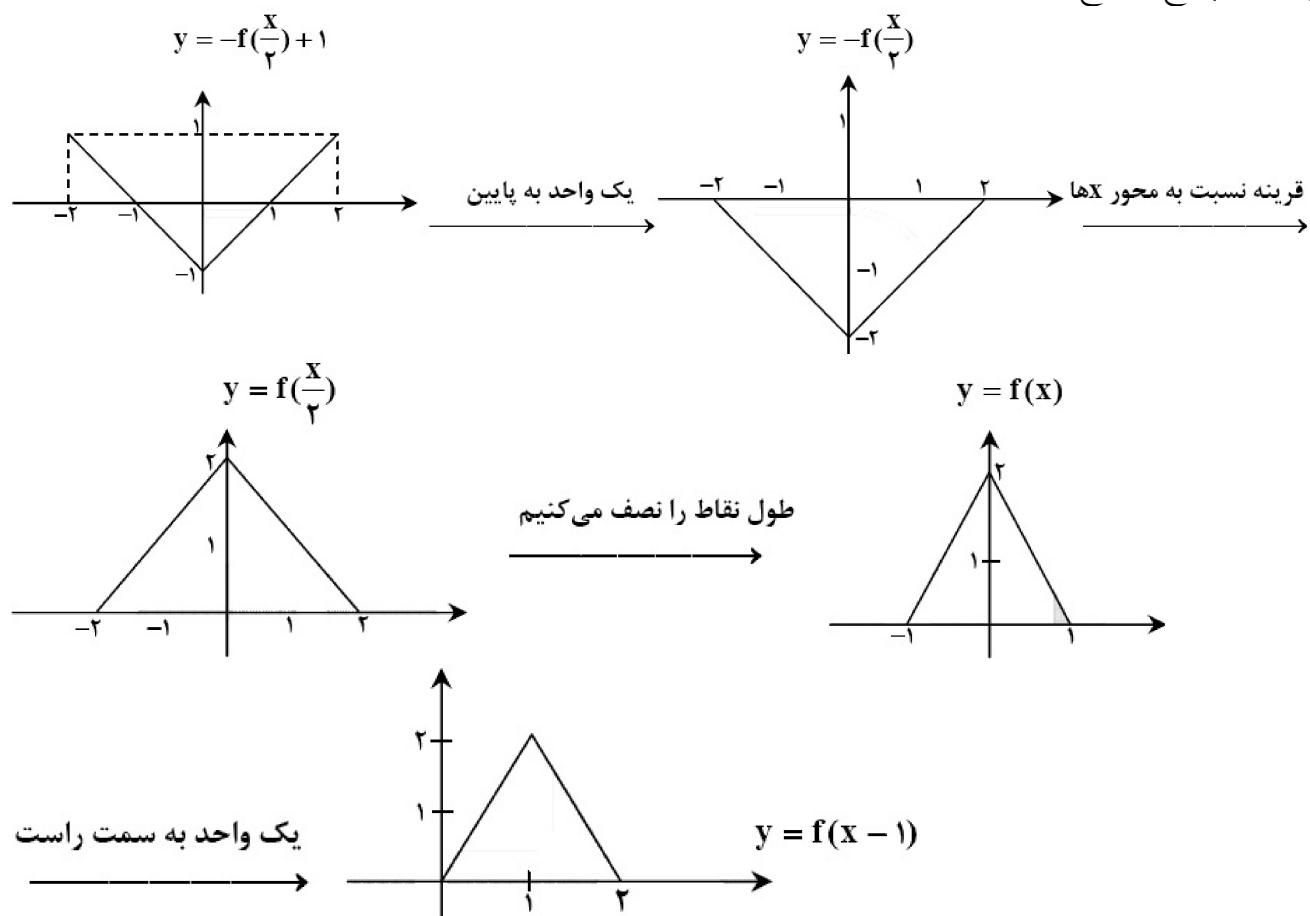
$$f \text{ فرد باشد} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \text{دامنه متقارن باشد} \rightarrow a - b = -a - 3 \\ 2 - f(-x) = -f(x) \rightarrow a + 2b = -4 \rightarrow \begin{cases} 2a - b = -3 \\ a + 2b = -4 \rightarrow 5a = -10 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases} \\ 3 - f(0) = 0 \rightarrow a + 2c = 0 \rightarrow c = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c = -2 - 1 + 1 = -2$$

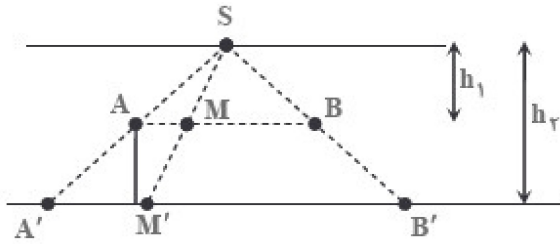
۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [-2, 2] \Rightarrow -2 \leq 3x - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{f(3x-1)} = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$$

۱۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی سر این شخص از A تا M حرکت می کند سایه ی سر او از A' تا M' حرکت می کند.



$$\frac{A'M'}{AM} = \frac{h_2}{h_1}$$

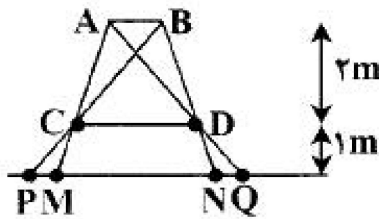
این نسبت ثابت و بزرگ تر از ۱ است. یعنی نسبت سرعت ها هم در هر قسمت از مسیر همان $\frac{h_2}{h_1}$ است.

۱۲- گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است. برای آن که پرتو تابش و بازتابش بر هم منطبق شوند، می بایست پرتو تابش بر خط عمود بر سطح آینه منطبق شود.

پس با 30° گردش آینه، خط عمود بر سطح آینه روی پرتو SI می افتد، یعنی در حال حاضر زاویه ی میان پرتو تابش و خط عمود بر سطح 30° است ($i = 30^\circ$)، پس زاویه ی میان پرتو تابش و بازتابش 60° است ($\theta = 2i = 60^\circ$)

۱۳- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. تصویر، با سرعت حرکت شخص، و در خلاف جهت حرکت شخص جابه جا می شود.

بنابراین سرعت آن نسبت به خود شخص، دو برابر خواهد شد. $\left(2 \times 60 \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 120 \frac{\text{cm}}{\text{s}}\right)$

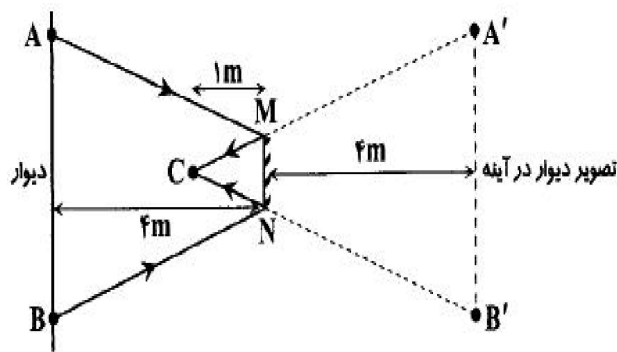


$$\frac{MP}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MP = 0.5m$$

$$\frac{CD}{PN} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow PN = 3m$$

$$MN = PN - MP = 2.5m$$

۱۴- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است.



۱۵- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{MN}{A'B'} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{MN}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت آینه}}{\text{مساحت قسمت موجود در تصویر}} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow S = 25 \times 0.2 \times 0.3 = 1.5m^2$$

۱۶- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر قطر چشمه ی نور گسترده و قطر جسم کدر برابر باشند، با نزدیک کردن پرده به جسم کدر قطر سایه تغییری نمی کند، لذا گزینه های ۲ و ۳ صحیح نیستند.

قطر چشمه ی نور و قطر جسم کدر به هر صورتی که نسبت به هم باشند، در همه ی حالات قطر نیم سایه با نزدیک کردن پرده به جسم کوچک تر می شود.

۱۷- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

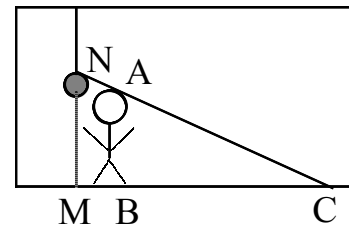
$$\frac{CB}{CM} = \frac{AB}{MN}$$

$$\frac{CB}{CB + 90} = \frac{140}{200}$$

$$200 \cdot CB = 140 \cdot CB + 140 \times 90$$

$$60 \cdot CB = 140 \times 90$$

$$CB = \frac{140 \times 90}{60} = 210 \text{ cm}$$



۱۸- گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است.

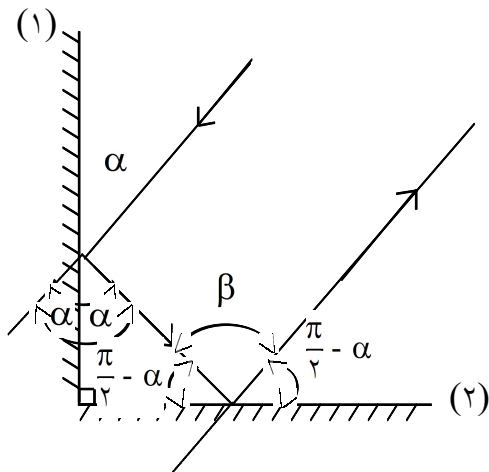
در شکل روبه‌رو می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \beta + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pi \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

با توجه به شکل، معلوم است که زاویه ی γ هم برابر 2α است و از

تساوی دو زاویه ی β و γ معلوم می‌شود که پرتو تابش به آینه ی (۱) و

پرتو تابش از آینه ی (۲) باهم موازی‌اند.



۱۹- گزینه ۱ پاسخ است.

نکته: اگر جسم کدری مابین یک منبع نور گسترده و پرده قرار

گیرد، روی پرده سایه و نیمسایه تشکیل می‌دهد. برای اندازه جسم

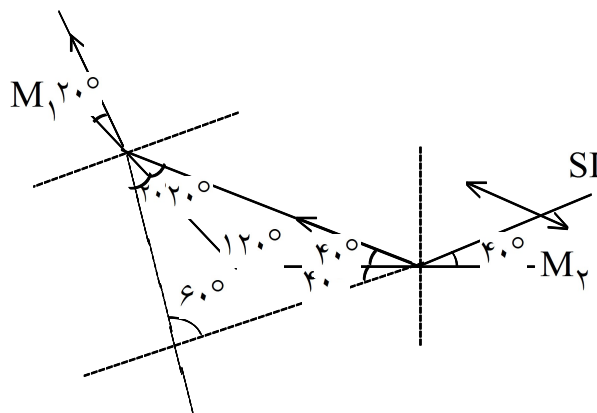
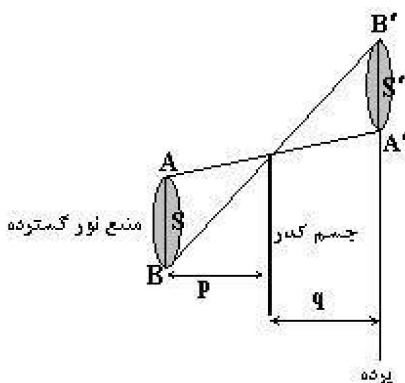
و نیم سایه داریم:

$$\frac{\text{فاصله ی منبع نور و جسم کدر}}{\text{پهنای نیم سایه}} = \frac{\text{قطر منبع نور}}{\text{فاصله پرده و جسم کدر}}$$

همانطور که دیدید مساحت نیمسایه مستقل از مساحت جسم کدر است

و فقط به فاصله جسم کدر از منبع و فاصله جسم کدر از پرده بستگی

دارد، لذا با دو برابر شدن شعاع یا قطر جسم کدر، هیچ تغییری در طول نیمسایه و نیز مساحت آن به وجود نمی‌آید.



۲۰- گزینه ی ۴ پاسخ صحیح است. شکل مساله را رسم می‌کنیم: